120624 初版
http://goo.gl/MFRFj

漸化式を帰納的に展開する

漸化式 1
$a_{n+1} = a_n + d$

この漸化式を帰納的に展開してみる。
十分に大きい n について,
$a_n = a_{n-1} + d$
$= (a_{n-1} + d) + d = a_{n-1} + 2d$
$= (a_{n-2} + 2d) + d = a_{n-2} + 3d$

というわけで，予想
$a_n = a_1 + (n-1)d$

実際,
$a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n-1)d + d = a_1 + nd$
だから，帰納法により予想は正しい。

漸化式 2
$a_{n+1} = r \cdot a_n$

この漸化式を帰納的に展開してみる。
十分に大きい n について,
$a_n = r \cdot a_{n-1}$
$= r \cdot (r \cdot a_{n-1}) = r^2 \cdot a_{n-1}$
$= r^2 \cdot (r \cdot a_{n-2}) = r^3 \cdot a_{n-2}$

というわけで，予想
$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

実際,
$a_{n+1} = r \cdot a_n = r\left(a_1 \cdot r^{n-1}\right) = a_1 \cdot r^n$
だから，帰納法により予想は正しい。

漸化式 3 (階差から一般項)

$a_{n+1} = a_n + b_n$

この漸化式を帰納的に展開してみる。

十分に大きい n について,

$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

$= (a_{n-2} + b_{n-2}) + b_{n-1} = a_{n-2} + (b_{n-2} + b_{n-1})$

$= (a_{n-3} + b_{n-3}) + (b_{n-2} + b_{n-1}) = a_{n-3} + (b_{n-3} + b_{n-2} + b_{n-1})$

というわけで，予想

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

実際,

$$a_{n+1} = a_n + b_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k + b_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

だから，帰納法により予想は正しい。

この式の最後の変形は重要である。

漸化式 4

$a_{n+1} = pa_n + q$

この漸化式を帰納的に展開してみる。

十分に大きい n について,

$a_n = pa_{n-1} + q$

$= p\left(pa_{n-2} + q\right) + q = p^2 a_{n-2} + q\left(p + 1\right)$

$= p^2\left(pa_{n-3} + q\right) + q\left(p + 1\right) = p^3 a_{n-3} + q\left(p^2 + p + 1\right)$

というわけで，予想

$$a_n = a_1 \cdot p^{n-1} + q \cdot \sum_{k=1}^{n-1} p^{k-1}$$

実際,

$$a_{n+1} = pa_n + q = p\left(a_1 \cdot p^{n-1} + q \cdot \sum_{k=1}^{n-1} p^{k-1}\right) + q$$

$$= a_1 \cdot p^n + q\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} p^k\right) = a_1 \cdot p^n + q \cdot \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}$$

だから，帰納法により予想は正しい。

この式の最後の変形は教科書は教えてくれない。